Correction des exercices : Equations différentielles du 2nd ordre

Résoudre les équations différentielles suivantes :

Exercice 5 :

(E5) : y'' + 6y' + 9y = (2t-1)e^{-3t}

L'équation caractéristique est : $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ et admet une solution double : $\lambda = -3$

On recherche y_p sous la forme $y_p(t) = (at^3 + bt^2)e^{-3t}$

$Y'_p(t) = (3at^2 + 2bt)e^{-3t} - 3e^{-3t}(at^3 + bt^2)$

$= (-3at^3 + (3a - 3b)t^2 + 2bt)e^{-3t}$

$Y''_p(t) = (9at^3 + (-18a + 9b)t^2 + (6a - 12b)t + 2b)e^{-3t}$

On obtient : $(6at + 2b)e^{-3t} = (2t - 1)e^{-3t}$

D'où : a=1/3 et b=-1/2

$y_p(t) = (\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2)e^{-3t}$ est solution particulière.

Les solutions de l'équation (E5) sont les fonctions y définies par :

$y(t) = (\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + Ct + C1)e^{-3t}$ avec C, C1 $\in \mathbb{R}$.

Exercice 6 :

$$\textbf{(E6)} \begin{cases} y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = -6e^{2x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$$

- *Étape 1 : Recherche d'une solution générale $y_H(x)$*

y''-4y'+4y= 0

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 16 = 0$

On a donc $\Delta=0$ donc on peut calculer 1 racine double réelle :

$r = \frac{-b}{2a} = 2$

La solution générale sera alors de la forme : $y_H(x)= (C_1x+C_2).e^{rx} =(C_1x+C_2).e^{2x}$

- *Étape 2 : Recherche d'une solution particulière $y_P(x)$*

On pose: $y_P(x)=e^{2x}.(ax^2+bx+c)$

La dérivé donne alors : $y_p'(x)=e^{2x}.(2ax+b)+e^{2x}.(2ax^2+2bx+2c) = e^{2x}.(2ax^2+(2a+2b)x+b+2c)$

La dérivé seconde est : $y_P''(x)=e^{2x}.(4ax+2a+2b)+e^{2x}.(4ax^2+(4a+4b).x+2b+4c) = e^{2x}.(4ax^2+(8a+4b).x+2a+4b+4c)$

Grâce à : $y''(x)-4y'(x)+4y(x)=-6e^{2x}$

On peut alors écrire : $e^{2x}\cancel{.}(4ax^2+(8a+4b).x+\cancel{2}a+\cancel{4}b+\cancel{4}c-8ax^2-(8a+\cancel{8b}).\cancel{x}-4\cancel{b}-8c+4a\cancel{x^2+}4bx+4c)=-6e^{2x}$

Soit : $x.(8a+4b-8a-8b+4b)+2a=-6$ ssi $2a=-6$ ssi $a=-3$

La solution particulière est alors : $y_P(x)=e^{2x}.(ax^2+bx+c)=-3x^2.e^{2x}$

- *Étape 3 : Recherche de la solution finale*

La solution finale s'écrit : $y(x)=y_P(x)+y_H(x)$

Soit $y(x)=(C_1.x+C_2).e^{2x}-3x^2.e^{2x}=e^{2x}.(C_1.x+C_2-3x^2)$

On sait que $y(0)=1$

Soit $y(0)=e^0.(C_1.0+ C_2-3.0)=C_2 \rightarrow C_2=1$

On sait que $y'(0)=4$, il faut donc trouver l'équation de $y'(x)$:

$y'(x)=e^{2x}.(C_1-6x)+e^{2x}.(2C_1x+2C_2-6x^2)= e^{2x}.(C_1+(2C_1-6).x+2C_2-6x^2)$

Soit $y'(0)=C_1+2=4 \quad \rightarrow C_1=2$

La solution de l'équation devient alors : $\mathbf{y(x)= e^{2x}(-3x^2+2x+1)}$

Exercice 7 :

$$\mathbf{(E7)}\ \left\{\begin{matrix} \mathbf{y'' - \sqrt{2}y' + y = x + 1} \\ \mathbf{y(0) = 1 + \sqrt{2}} \\ \mathbf{y'(0) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} \end{matrix}\right\}$$

- *Étape 1 : Recherche d'une solution générale $y_H(x)$*

$y''-\sqrt{2}y'+y=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-\sqrt{2})^2-4=-2$

On a donc $\Delta<0$ donc on peut calculer 2 racines simples complexes :

$$z_1=\frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{et} \qquad z_2=\frac{-b-i\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

La solution générale sera alors de la forme : $y_H(x)=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}.(C_1.\cos(\frac{\sqrt{2}}{2}x)+C_2.\sin(\frac{\sqrt{2}}{2}x))$

- *Étape 2 : Recherche d'une solution particulière $y_P(x)$*

On pose: $y_P(x)=e^0.(ax+b)=ax+b$

La dérivé donne alors : $y_p'(x)=a$

La dérivé seconde est : $y_P''(x)=0$

Grâce à : $y''-\sqrt{2}y'+y=x+1$

On peut alors écrire : $-\sqrt{2}.a+ax+b=x+1$

On déduit alors : $a=1$ et $b=1+\sqrt{2}$

La solution particulière est alors : $y_P(x)=x+1+\sqrt{2}$

- *Étape 3 : Recherche de la solution finale*

La solution finale s'écrit : $y(x)=y_P(x)+y_H(x)$

Soit $y(x)=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}.(C_1.\cos(\frac{\sqrt{2}}{2}x)+C_2.\sin(\frac{\sqrt{2}}{2}x))+x+1+\sqrt{2}$

On sait que $y(0)=1+\sqrt{2}$

Soit $y(0)=e^0.(C_1.\cos\cancel{(0)+}C_2.\sin(0))+1+\sqrt{2}=C_1+1+\sqrt{2}=1+\sqrt{2} \rightarrow C_1=0$

On sait que $y'(0)=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$, il faut donc trouver l'équation de $y'(x)$:

On pose alors : $u=C_1.\cos(\frac{\sqrt{2}}{2}x)+C_2\sin(\frac{\sqrt{2}}{2}x)$ et $v=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}$

Donc : $u'=-C_1.\frac{\sqrt{2}}{2}.\sin(\frac{\sqrt{2}}{2}x)+C_2.\frac{\sqrt{2}}{2}.\cos(\frac{\sqrt{2}}{2}x)$ et $v'=\frac{\sqrt{2}}{2}.e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}$

Soit : y’(x)= $e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}$.(-C_1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.sin($\frac{\sqrt{2}}{2}$x)+C_2. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.cos($\frac{\sqrt{2}}{2}$x)+$\frac{\sqrt{2}}{2}$ C_1.cos($\frac{\sqrt{2}}{2}$x)+C_2. $\frac{\sqrt{2}}{2}$sin($\frac{\sqrt{2}}{2}$x))+1

Or C_1=0 ; ~~donc : y’(x)=1+$e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}$~~.(C_1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.(cos($\frac{\sqrt{2}}{2}$x)-sin($\frac{\sqrt{2}}{2}$x))+C_2.$\frac{\sqrt{2}}{2}$(cos($\frac{\sqrt{2}}{2}$x)+sin($\frac{\sqrt{2}}{2}$x)))

y’(x)=1+ C_2.$\frac{\sqrt{2}}{2}$(cos($\frac{\sqrt{2}}{2}$x)+sin($\frac{\sqrt{2}}{2}$x))

Soit : y’(0)=1+C_2. $\frac{\sqrt{2}}{2}$(cos0+sin0)= 1+C_2. $\frac{\sqrt{2}}{2}$=1+$\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\rightarrow C_2=1$

La solution de l’équation devient alors : $\mathbf{y(x)=}\ e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}.\,\boldsymbol{sin}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{x}\right)+\boldsymbol{x}+\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{2}}$